Sia data una forma ω chiusa definita su di un semplicemente connesso E di $\mathbf{R}^2$ oppure $\mathbf{R}^3$. Possiamo trovare una funzione (detta anche *funzione potenziale*) $f(\underline{x})$ tale che $\omega = df$. Sia $\underline{\gamma}(t)$ una curva tale che $\underline{\gamma}(a) = \underline{x}_0$ e $\underline{\gamma}(b) = \underline{x}$. $\underline{\gamma}(t) \in E$ per ogni t. Come funzione $f(\underline{x})$ basta prendere $\int_{\underline{\gamma}} \omega$. Ai fini del calcolo però conviene prendere la curva che rende l'integrale il più semplice possibile e ciò dipende dalla struttura di E. Se ad esempio $E = \mathbf{R}^3$ e $\omega = \sum_{i=1}^3 a_i(\underline{x})dx_i$ allora una possibile curva è : $\underline{\gamma}_1(t) = (t, y_0, z_0)$ $x_o \le t \le x$, $\underline{\gamma}_2(t) = (x, t, z_0)$ $y_0 \le t \le y$, $\underline{\gamma}_3(t) = (x, y, z)$ $z_0 \le t \le z$. Si noti che in realtà si sono introdotte tre distinte curve in ciascuna delle quali due delle coordinate sono tenute fissate. $f(\underline{x}) \overset{\text{def}}{=} \int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\gamma}_1} \omega + \int_{\underline{\gamma}_2} \omega + \int_{\underline{\gamma}_3} \omega =$

$$\int_{x_0}^x dt a_1(t, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y dt a_2(x, t, z_0) + \int_{z_0}^z dt a_3(x, y, t).$$

Si verifichi che $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \omega(\underline{x})$. *Ogni altra funzione potenziale differisce dalla precedente per una costante.* Ad esempio si può procedere nella seguente maniera. Si risolve la equazione differenziale $f_x(\underline{x}) = a_1(\underline{x})$ e quindi $f(\underline{x}) = \int_{x_0}^x dt a_1(t, y, z) + q(y, z)$. Si ottiene $f_y(\underline{x}) = \int_{x_0}^x dt \frac{\partial a_1}{\partial y}(t, y, z) +$ $q_y(y, z) =$ (usando la esattezza di ω) $\int_{x_0}^x dt \frac{\partial a_2}{\partial t}(t, y, z) + q_y(y, z) =$ integrando $a_2(x, y, z) - a_2(x_0, y, z,) + q_y(y, z) = a_2(x, y, x)$ e quindi $q_y(y, z) = a_2(x_0, y, z)$. Una ulteriore integrazione dà $q(y, z) = \int_{y_0}^y ds a_2(x_0, s, z) + p(z)$. A questo punto la funzione potenziale è $f(x, y, z) = \int_{x_0}^x dt a_1(t, y, z) + \int_{y_0}^y ds a_2(x_0, s, z) + p(z)$. L'ultima derivazione dà $f_z(x, y, z) =$ $\int_{x_0}^x \frac{\partial a_1}{\partial z}(t, y, z)dt + \int_{y_0}^y \frac{\partial a_2}{\partial z}(x_0, s, z)ds + p_z = a_3(x, y, z)$ ed usando ancora l'esattezza si ottiene $f_z(x, y, z) = \int_{x_0}^x \frac{\partial a_3}{\partial x}(t, y, z)dt + \int_{y_0}^y \frac{\partial a_3}{\partial y}(x_0, s, z)ds + p_z = a_3(x, y, z)$. Integrando si ha $p_z(z) =$ $a_3(x_0, y_0, z)$ e quindi $p(z) = c + \int_{z_0}^z du a_3(x_0, y_0, u)$ e quindi la funzione potenziale è $f(x, y, z) =$

$$\int_{x_0}^x dt a_1(t, y, z) + \int_{y_0}^y ds a_2(x_0, s, z) + \int_{z_0}^z du a_3(x_0, y_0, u) + c$$

Apparentemente le due funzioni costruite sono diverse fra loro. Senza leggere quanto segue, gli studenti dovrebbero dimostrarne l'uguaglianza.

Partiamo dalla seconda funzione.

$$\int_{x_0}^x dt a_1(t, y, z) = \int_{x_0}^x dt\big(a_1(t, y, z) - a_1(t, y_0, z)\big) + \int_{x_0}^x dt\big(a_1(t, y_0, z) - a_1(t, y_0, z_0)\big) + \int_{x_0}^x dt a_1(t, y_0, z_0).$$

L'ultimo pezzo è esattamente il terzo della $f(\underline{x})$ trovata per prima e lo mettiamo da parte. $\int_{x_0}^x dt\big(a_1(t, y, z) - a_1(t, y_0, z)\big) + \int_{x_0}^x dt\big(a_1(t, y_0, z) - a_1(t, y_0, z_0)\big) = \int_{x_0}^x dt \int_{y_0}^y \frac{\partial a_1}{\partial \xi}(t, \xi, z)d\xi +$ $\int_{x_0}^x dt \int_{z_0}^z \frac{\partial a_1}{\partial \eta}(t, y_0, \eta)d\eta = \int_{x_0}^x dt \int_{y_0}^y \frac{\partial a_2}{\partial t}(t, \xi, z)d\xi + \int_{x_0}^x dt \int_{z_0}^z \frac{\partial a_3}{\partial t}(t, y_0, \eta)d\eta = \int_{y_0}^y d\xi\big(a_2(x, \xi, z) -$ $a_2(x_0, \xi, z)\big) + \int_{z_0}^z d\eta\big(a_3(x, y_0, \eta) - a_3(x_0, y_0, \eta)\big) \overset{\text{def}}{=} I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

Inoltre $\int_{y_0}^y ds a_2(x_0, s, z) = \int_{y_0}^y ds\big(a_2(x_0, s, z) - a_2(x, s, z)\big) + \int_{y_0}^y ds\big(a_2(x, s, z) - a_2(x, s, z_0)\big) +$ $\int_{y_0}^y ds a_2(x, s, z_0) \overset{\text{def}}{=} J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$. L'ultimo pezzo, J_5, è uguale al secondo della $f(\underline{x})$ trovata per prima e lo mettiamo da parte. Abbiamo $I_1 + J_2 = 0$, $I_2 + J_1 = 0$. Rimane

$I_3+I_4+J_3+J_4=\int_{z_0}^{z} d\eta\big(a_3(x,y_0,\eta)-a_3(x_0,y_0,\eta)\big)+\int_{y_0}^{y} ds\big(a_2(x,s,z)-a_2(x,s,z_0)\big)$. $J_3+J_4=\int_{y_0}^{y} ds\big(a_2(x,s,z)-a_2(x,s,z_0)\big)=\int_{y_0}^{y} ds\int_{z_0}^{z} d\eta\frac{\partial a_2}{\partial\eta}(x,s,\eta)=\int_{y_0}^{y} ds\int_{z_0}^{z} d\eta\frac{\partial a_3}{\partial s}(x,s,\eta)=\int_{z_0}^{z} d\eta\big(a_3(x,y,\eta)-a_3(x,y_0,\eta)\big)$ per cui $I_3+I_4+J_3+J_4=\int_{z_0}^{z} d\eta\big(-a_3(x_0,y_0,\eta)+a_3(x,y,\eta)\big)$. A questa espressione va aggiunto l'ultimo contributo ossia $\int_{z_0}^{z} du a_3(x_0,y_0,u)$ e quindi, sommando i tre contributi rimasti si ottiene la prima espressione $f(\underline{x})$ ottenuta.